2º Esonero e primo recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
19–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (A)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (10) – (10) 1) Si risolva la seguente equazione differenziale $\begin{cases} y''+y=\delta(t^2-3t+2) \\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1 \end{cases}$

2) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\frac{\pi}{2})=0$ e $y'(\frac{\pi}{2})=0$

Ogni equazione è della forma $y''+y=\delta(t^2-(a+b)t+ab)=\frac{1}{b-a}(\delta(t-a)+\delta(t-b))$. Detta $Y(p)=\mathcal{L}(y)$ si ha $Y(p)=\dfrac{1}{b-a}\dfrac{e^{-pa}+e^{-pb}}{p^2+1}+\dfrac{py_0+y_1}{p^2+1}$ e quindi $y(t)=\dfrac{1}{b-a}(\sin(t-a)H(t-a)+\sin(t-b)H(t-b))+y_0\cos t+y_1\sin t$. Inoltre si ha $y'(t)=\dfrac{1}{b-a}(\cos(t-a)H(t-a)+\cos(t-b)H(t-b))+\dfrac{1}{b-a}(\sin(t-a)\delta(t-a)+\sin(t-b)\delta(t-b))-y_0\sin t+y_1\cos t=\dfrac{1}{b-a}(\cos(t-a)H(t-a)+\cos(t-b)H(t-b))-y_0\sin t+y_1\cos t$.
In ciascun problema bisognava uguagliare a zero il valore di $y(t)$ e di $y'(t)$ per $t=t_0$ con $a<t_0<b$ per cui si ha

Compito A. $y(\frac{\pi}{2})=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-a)}{b-a}+y_1=0$ e $y'(\frac{\pi}{2})=\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}-a)}{b-a}-y_0=0$ ossia $y_1=-\dfrac{\cos a}{b-a}$ e $y_0=\dfrac{\sin a}{b-a}$

Compito B. $y(\frac{3}{2}\pi)=\dfrac{\sin(\frac{3}{2}\pi-a)}{b-a}-y_1=0$ e $y'(\frac{3}{2}\pi)=\dfrac{\cos(\frac{3}{2}\pi-a)}{b-a}+y_0=0$ ossia $y_1=-\dfrac{\cos a}{b-a}$ e $y_0=\dfrac{\sin a}{b-a}$.

Compito C. $y(\frac{5}{2}\pi)=\dfrac{\sin(\frac{5}{2}\pi-a)}{b-a}+y_1=0$ e $y'(\frac{5}{2}\pi)=\dfrac{\cos(\frac{5}{2}\pi-a)}{b-a}-y_0=0$ ossia $y_1=-\dfrac{\cos a}{a-b}$ e $y_0=\dfrac{\sin a}{a-b}$.

Compito D. $y(\frac{7}{2}\pi)=\dfrac{\sin(\frac{7}{2}\pi-a)}{b-a}-y_1=0$ e $y'(\frac{7}{2}\pi)=\dfrac{\cos(\frac{7}{2}\pi-a)}{b-a}+y_0=0$ ossia $y_1=-\dfrac{\cos a}{b-a}$ e $y_0=\dfrac{\sin a}{b-a}$.

Problema n.2 (15) Si risolvano le seguenti equazioni integrali: 1) $\varphi(t)=t+\int_0^t dx\varphi(x)\sin(t-x)$

Detta $\Phi=\mathcal{L}(\varphi)$ si ha $\Phi=\dfrac{1}{p^2}+\Phi\mathcal{L}(\sin(t))$ da cui $\Phi=\dfrac{p^2+1}{p^4}=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^4}$ e quindi $\varphi(t)=t+\dfrac{t^3}{6}$ oppure $\varphi(t)=\dfrac{1}{6}\lim_{p\to 0}\dfrac{d^2}{dp^2}(p^2+1)e^{pt}\Big|_{p=0}=t+\dfrac{t^3}{6}$

2) $\varphi(t)=t+\int_0^t dx\varphi(x)\sinh(t-x)$

$\Phi=\dfrac{p^2-1}{p^2(p^2-2)}$ da cui $\varphi(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sinh(\sqrt{2}t)$

Problema n.3 (10) – (10) 1) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-x} \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)\equiv 0, \ u(0,t)=0 \end{cases}$$

Suggerimenti: i) come soluzione particolare della equazione $f''-f=e^{-cx}$ si provi $f(x)=\alpha e^{-cx}$ ii) si deve trasformare secondo Laplace anche il termine noto della equazione

2) Una volta trovata la soluzione $u(x,t)$ si calcoli $u_t(x,t)\Big|_{x=a,t=1+\frac{\ln 2}{a}}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p)-a^2 v''=\dfrac{e^{-rx}}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{e^{-rx}}{p(p^2-a^2r^2)}-\dfrac{e^{-px/a}}{p(p^2-a^2r^2)}$
da cui

$$\begin{aligned} u(x,t) &= V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) = \\ &= \frac{-e^{-rx}}{a^2r^2}H(t)+\frac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)H(t)-\frac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a^2r^2}H(t-\frac{x}{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = {} & \frac{-e^{-rx}}{a^2r^2}H'(t)+\frac{e^{-rx}}{ar}\sinh(art)H(t)+\frac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)H'(t)-\frac{1}{ar}\sinh(art-rx)H(t-\frac{x}{a})- \\ & -\frac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)H'(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a^2r^2}H'(t-\frac{x}{a}) \end{aligned}$$

(le derivate delle funzioni a scalino sono ovviamente rispetto al tempo). Si ha quindi

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{-e^{-rx}}{a^2r^2}\delta(t)+\frac{e^{-rx}}{ar}\sinh(art)\delta(t)+\frac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)\delta(t)-\frac{1}{ar}\sinh(art-rx)H(t-\frac{x}{a})- \\ &-\frac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)\delta(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a^2r^2}\delta(t-\frac{x}{a}) = \\ &= -\frac{1}{ar}\sinh(art-rx)H(t-\frac{x}{a}) \end{aligned}$$

Per $x=a$ otteniamo $u_t(a,t)=-\dfrac{1}{ar}\sinh(art-ra)H(t-1)$ e poi per $t=1+\dfrac{\ln q}{ar}$ diventa $u_t(a,1+\dfrac{\ln q}{ar})=-\dfrac{1}{ar}\dfrac{q^2-1}{q}$

Compito A: $-3/(4a)$, Compito B: $-2/(3a)$, Compito C: $-15/(24a)$, Compito D: $-3/5a)$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione $f(z) = \dfrac{z^3 e^{1/z}}{(z-1)^3}$. Si calcoli

1) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z=0$ e convergente per $0<|z|<1$.

$$f(z) = -\frac{1}{2} z^3 e^{c/z} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c^k}{z^k k!} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) z^{n+3},$$

2) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z=0$ e convergente per $|z|>1$.

È lo sviluppo nell'intorno del punto all'infinito. È dato da

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^3 c^k}{z^k k!} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{z^r} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{z^s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^3 c^k}{z^k k!} \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(N+1)(N+2)}{2z^N}$$

lo svolgimento è come prima solo che le derivate ora vanno fatte rispetto alla variabile $1/z$.

3) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} f(z)dz$

Il residuo in $z=1$ è $e^c(3+\frac{c^2}{2}-2c)$ e quindi A: $3\pi ie$, B: $11\pi i/e$, C: $2\pi e^2$, D: $18\pi i/e^2$.

4) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} f(z)dz$. Suggerimento: si usi il punto all'infinito

Dobbiamo calcolare il residuo nel punto all'infinito e quindi usiamo lo sviluppo del punto 2) per calcolare il coefficiente del termine $1/z$ ossia $c+3$. Ne segue che il residuo è $-2\pi i$ e l'integrale è $2\pi i(c+3)$ da cui A: $8\pi i$, B: $6\pi i$, C: $10\pi i$, D: $4\pi i$

5) **Usando opportunamente i punti 3) e 4)** si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{|z|=1/2} f(z)dz$

Il calcolo del residuo in $z=0$ è complicato dal fatto che al termine $1/z$ concorrono infiniti termini. Conviene usare il fatto che la somma dei residui nei punti $z=0$, $z=1$, $z=\infty$ è zero. Quindi $Resf(0) = -Resf(1) - Resf(\infty)$ e quindi $Resf(0) = c+3-\dfrac{e^c}{2}(6-4c+c^2)$ da cui $I = 2\pi i(c+3) - \pi i e^c(6-4c+c^2)$ ossia A: $I = 8\pi i - 3ei\pi$, B:$4\pi i - 11\pi i e^{-1}$ C: $10\pi i - 2\pi i e^2$, D: $2\pi i - 18\pi i e^{-2}$

Problema n.5 (7) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{10}+\sin t} dt$.

Con la solita sostituzione si arriva a $z=e^{it}$ $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{i}(z-\frac{1}{z}) \frac{dz}{\pm z^2 + 2i\sqrt{a}z \mp 1}$ dove $a = 17, 10$.

A. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1 = i(3-\sqrt{10})$ per cui si ha $I = 2\pi i(Resf(0) + Resf(z_1)) = 2\pi - \dfrac{2}{3}\sqrt{10}\pi$

B. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1 = i(\sqrt{10}-3)$ per cui si ha $I = 2\pi i(Resf(0) + Resf(z_1)) = -2\pi + \dfrac{2}{3}\sqrt{10}\pi$

C. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1 = i(4-\sqrt{17})$ per cui si ha $I = 2\pi i(Resf(0) + Resf(z_1) = 2\pi - \dfrac{\sqrt{17}}{2}\pi$

D. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1 = i(\sqrt{17}-4)$ per cui si ha $I = 2\pi i(Resf(0) + Resf(z_1)) = -2\pi + \dfrac{\sqrt{17}}{2}\pi$

$2^{\underline{o}}$ Esonero e primo recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
19–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (B)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (10) – `(10)` 1) Si risolva la seguente equazione differenziale $\begin{cases} y''+y=\delta(t^2-10t+24) \\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1 \end{cases}$

2) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\frac{3}{2}\pi)=0$ e $y'(\frac{3}{2}\pi)=0$

Problema n.2 (15) Si risolvano le seguenti equazioni integrali: 1) $\varphi(t)=1+\int_0^t dx\varphi(x)\cos(t-x)$

Detta $\Phi=\mathcal{L}(\varphi)$ si ha $\Phi=\frac{1}{p}+\Phi\mathcal{L}(\cos(t))$ da cui $\Phi=\frac{p^2+1}{p(p^2-p+1)}$ e quindi $\varphi(t)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

2) $\varphi(t)=1+\int_0^t dx\varphi(x)\cosh(t-x)$

Detta $\Phi=\mathcal{L}(\varphi)$ si ha $\Phi=\frac{1}{p}+\Phi\mathcal{L}(\cos(t))$ da cui $\Phi=\frac{p^2-1}{p(p^2-p-1)}$ e quindi $\varphi(t)=1+\frac{2}{\sqrt{5}}e^{\frac{1}{2}t}\sinh\frac{\sqrt{5}}{2}t$

Problema n.3 (10) – `(10)` 1) Si risolva la seguente equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-2x} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Suggerimento: i) come soluzione particolare della equazione $f''-f=e^{-cx}$ si provi $f(x)=\alpha e^{-cx}$ ii) si deve trasformare secondo Laplace anche il termine noto della equazione

2) Una volta trovata la soluzione $u(x,t)$ si calcoli $u_t(x,t)\big|_{x=a,t=1+\frac{\ln 3}{2a}}$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione $f(z) = \dfrac{z^3 e^{-1/z}}{(z-1)^3}$. Si calcoli

1) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$ e convergente per $0 < |z| < 1$.

2) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| > 1$.

3) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} f(z)dz$

4) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} f(z)dz$. Suggerimento: si usi il punto all'infinito

5) **Usando opportunamente i punti 3) e 4)** si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{|z|=1/2} f(z)dz$

Problema n.5 (7) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{10} - \sin t} dt$

$2^{\underline{o}}$ Esonero e primo recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
19–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (C)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (10) – (10) Si risolva la seguente equazione differenziale $\begin{cases} y'' + y = \delta(t^2 - 14t + 48) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$

2) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\frac{5}{2}\pi) = 0$ e $y'(\frac{5}{2}\pi) = 0$

Problema n.2 (15) Si risolvano le seguenti equazioni integrali: 1) $\varphi(t) = t - \int_0^t dx\varphi(x)\sin(t-x)$

$\Phi = \dfrac{p^2+1}{p^2(p^2+2)}$ da cui $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\sqrt{2}t)$
2) $\varphi(t) = t - \int_0^t dx\varphi(x)\sinh(t-x)$

$\Phi = \dfrac{p^2-1}{p^4}$ da cui $\varphi(t) = t - \dfrac{1}{6}t^3,$

Problema n.3 (10) – (10) 1) Si risolva la seguente equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-3x} \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

Suggerimento: i) come soluzione particolare della equazione $f'' - f = e^{-cx}$ si provi $f(x) = \alpha e^{-cx}$ ii) si deve trasformare secondo Laplace anche il termine noto della equazione

2) Una volta trovata la soluzione $u(x,t)$ si calcoli $u_t(x,t)\big|_{x=a, t=1+\frac{\ln 4}{3a}}$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione $f(z) = \dfrac{z^3 e^{2/z}}{(z-1)^3}$. Si calcoli

1) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$ e convergente per $0 < |z| < 1$.

2) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| > 1$.

3) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} f(z)dz$

4) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} f(z)dz$. Suggerimento: si usi il punto all'infinito

5) **Usando opportunamente i punti 3) e 4)** si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{|z|=1/2} f(z)dz$

Problema n.5 (7) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{17} - \sin t} dt$

2º Esonero e primo recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
19–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (D)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (10) – (10) Si risolva la seguente equazione differenziale $\begin{cases} y'' + y = \delta(t^2 - 22t + 120) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$

2) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\frac{7}{2}\pi) = 0$ e $y'(\frac{7}{2}\pi) = 0$

Problema n.2 (15) Si risolvano le seguenti equazioni integrali: 1) $\varphi(t) = 1 - \int_0^t dx\varphi(x)\cos(t - x)$

$\Phi = \dfrac{p^2 + 1}{p(p^2 + p + 1)}$ da cui $\varphi(t) = -1 + 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2})t$

2) $\varphi(t) = 1 - \int_0^t dx\varphi(x)\cosh(t - x)$

$\Phi = \dfrac{p^2 - 1}{p(p^2 + p - 1)}$ da cui $\varphi(t) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-\frac{1}{2}t}\sinh(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t)$

Problema n.3 (10) – (10) 1) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-4x} \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) \equiv 0, \ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: i) come soluzione particolare della equazione $f'' - f = e^{-cx}$ si provi $f(x) = \alpha e^{-cx}$ ii) si deve trasformare secondo Laplace anche il termine noto della equazione

2) Una volta trovata la soluzione $u(x, t)$ si calcoli $u_t(x, t)\big|_{x=a, t=1+\frac{\ln 5}{4a}}$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione $f(z) = \dfrac{z^3 e^{-2/z}}{(z-1)^3}$. Si calcoli

1) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$ e convergente per $0 < |z| < 1$.

2) Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| > 1$.

3) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} f(z)dz$

4) L'integrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} f(z)dz.$ Suggerimento: si usi il punto all'infinito

5) **Usando opportunamente i punti 3) e 4)** si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{|z|=1/2} f(z)dz$

Problema n.5 (7) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{17}+\sin t} dt$